GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DE NATUREZA VERBAL NA CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE RETA HIPERBÓLICA

LUIZ CARLOS DOS SANTOS FILHO[1]
MARIA BEATRIZ FAGUNDES [2]

RESUMO

O presente artigo apresenta alguns resultados obtidos em uma pesquisa de mestrado realizada na área de ensino de ciências e matemática. A pesquisa teve como objetivo estudar a seguinte questão: *Quais são e como atuam os obstáculos epistemológicos que podem surgir na formação inicial de professores e professoras de matemática no campo das Geometrias Não Euclidianas*. A pesquisa foi baseada na aplicação e análise de um minicurso sobre Geometrias Não Euclidianas para estudantes de licenciatura em matemática. O minicurso foi gravado em áudio e vídeo e a análise foi feita seguindo os preceitos da *análise de discurso* conforme a proposta de Orlandi. Neste artigo trazemos alguns resultados, da referida pesquisa, referentes ao papel de obstáculos epistemológicos de natureza verbal na construção dos conceitos de retas hiperbólicas (Disco de Poincaré). Os resultados aqui apresentados indicam a relevância da atuação dos obstáculos epistemológicos dentro do processo de ensino e aprendizagem e sua contribuição para compreensão das inercias e retrocessos no desenvolvimento do conhecimento.

Palavras-chave: obstáculos epistemológicos; geometrias não euclidianas; reta hiperbólica; formação de professores de matemática.

ABSTRACT

This article presents some results obtained in a master's research carried out in the area of science and mathematics teaching. The research aimed to study the following question: What are and how the epistemological obstacles that may arise in the initial formation of teachers of mathematics in the field of Non-Euclidean Geometries. The research was based on the application and analysis of a short course on Non-Euclidean Geometries, for undergraduate students in mathematics. The short course was recorded in audio and video and the analysis was carried out following the precepts of discourse analysis according to Orlandi's proposal. In this article we bring some results, from the referred research, referring to the role of epistemological obstacles of a verbal nature in the construction of the concept of hyperbolic lines (Poincaré Disc). The results presented here indicate the relevance of the performance of the epistemological obstacles within the teaching and learning process and their contribution to the understanding of the inertia and setbacks in the development of knowledge.

[1]Mestre pela Universidade Federal do ABC, Docente Fatec Mogi das Cruzes. Email: luiz.santos118@fatec.sp.gov.br.
[2]Doutora pela Freie Universität Berlin, Docente Universidade Federal do ABC – UFABC.

Keywords: epistemological obstacles; non-euclidean geometry; hyperbolic straight line; undergraduate training in mathematics.

INTRODUÇÃO

As Geometrias Não Euclidianas compõem um corpo de conhecimento essencial no campo da matemática e sua inserção no ensino de ciências e de matemática pode motivar ricas reflexões sobre a natureza do conhecimento científico e sobre as próprias bases constituintes da matemática. Apesar de sua inegável importância conceitual e histórica, o ensino destas novas geometrias, precisa sobrepujar as abordagens essencialmente formais-conceituais que, em geral, são isentas de uma reflexão mais profunda sobre o esforço de abstração e de superação das dificuldades que frequentemente emergem no processo de construção desse conhecimento. Na perspectiva da formação inicial de professores(as) de matemática é imprescindível estimular a reflexão de forma mais profunda sobre o valor do conhecimento matemático também como construção cultural humana. Na busca de contribuir para ampliar a discussão sobre o tema – as Geometrias Não Euclidianas em um contexto de formação inicial docente – apresentamos a seguir algumas considerações resultantes de um estudo, desenvolvido no âmbito de uma pesquisa de mestrado, no qual procurou-se investigar o papel dos obstáculos epistemológicos, na concepção de G. Bachelard, emergentes em uma situação de ensino e aprendizagem de Geometria Não Euclidiana.

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

As Geometrias Não Euclidianas, que começaram a ser divulgadas mais amplamente a partir da primeira metade do século XIX por Gauss, Lobachevsky e Bolyai (BOYER, 1974), marcam o início da reforma de um pensamento solidamente fundamentado na visão de mundo euclidiana. A estrutura orgânica da geometria euclidiana, materializada em *Os Elementos de Euclides* (aproximadamente 300 a.C.), sintetiza os conhecimentos matemáticos de uma época e inaugura uma sofisticada visão de mundo alicerçada nos moldes de um método axiomático e dedutivo.

Ainda que o programa de Euclides guarde algumas marcas de um passado apegado às coisas do mundo concreto e acessível por meio dos sentidos (BACHELARD, 1978), ele já nos coloca claramente diante da necessidade de uma drástica ruptura com a realidade imediata. É também no cerne de *Os Elementos de Euclides* que encontramos uma estrela de primeira grandeza, o quinto postulado. Associado aos outros elementos constituintes da obra de Euclides, o quinto postulado, que determina a unicidade da reta paralela e fixa a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano em exatos 180º, já carrega em sua essência controvérsias que iriam gestar as novas geometrias (ANDRADE, 2013).

Resgatemos aqui o quinto postulado em uma formulação próxima ao que teria sido sua versão original, conforme tradução de Irineu Bicudo: “5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.” (EUCLIDES, 2009, p.98).

Em uma variante posterior, formulada por John Playfair (1748 - 1819), o quinto postulado ganha a seguinte enunciação: “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais que uma paralela a essa reta.” (EVES, 1995, p. 539). Nessa forma mais atual, presente com frequência em abordagens e livros didáticos destinados à educação básica, o quinto postulado passa a ser disseminado e mais amplamente conhecido como o *postulado das paralelas.*

Vale destacar que Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009) apresenta uma versão da obra *Os Elementos* a partir de 23 definições, cinco postulados e nove noções comuns. E, atualmente alguns autores, dentre eles Aaboe (2002), chamam a atenção para o fato de não haver diferenciação entre axiomas e postulados, uma vez que ambos podem ser assumidos como afirmações iniciais de uma teoria, ou seja, como hipóteses iniciais adotadas sem demonstração e a partir das quais os teoremas podem ser demonstrados. As noções de *ponto*, *linha reta, plano (superfície) e paralelas* aparecem nessas definições iniciais.

Essa organização pode ser encontrada também em materiais didáticos atuais para o ensino de geometria plana no ensino médio, como é o caso do livro de Dolce e Pompeu (2011), no qual o *ponto, a reta e o plano* são tratados como noções primitivas e assumidos mesmo sem a necessidade de suas definições.

Sobre o quinto postulado é necessário ressaltar ainda que a insatisfação com esse postulado data já da época de Euclides, quando surgem também as primeiras tentativas de o demonstrar a partir dos outros postulados, torná-lo, portanto, um teorema, pois o mesmo tem uma estrutura mais complexa e é mais assemelhado a um teorema. Contudo, sabemos hoje que apesar das tentativas de demonstrar sua validade como teorema, o quinto postulado foi mantido incólume por quase dois mil anos, ainda que tenha se transformado em tema de estudo de muitos autores (BONOLA, 1955).

Se a demonstração do quinto postulado (tornando-o um teorema) a partir dos demais tivesse sido bem-sucedida, a geometria euclidiana, provavelmente, teria se mantido como o modelo para a representação matemática (em termos geométricos) da realidade; e esse modelo teria sido desejado, pois acomodava-se bem aos nossos anseios por um mundo mais acessível aos sentidos. Entretanto, apesar da demonstração do quinto postulado como teorema não ter ocorrido, a coerência interna da geometria euclidiana e sua projeção no que entendemos de forma mais imediata como sendo realidade, acabaram por validar esse conhecimento como o único modelo possível. É imprescindível salientar, contudo, que, “O 5º postulado não é uma lei natural nem é evidente por si mesmo, é uma decisão intelectual imposta para validar uma teoria adaptando-a a um fato constatado empiricamente.” (ANDRADE, 2013, p. 8).

O desfecho desta história, constatando que o quinto postulado não pode ser deduzido dos demais (EVES,1995), ocorreu quando foram apresentadas as demonstrações do que ficou conhecido como a *hipótese do ângulo agudo*[3], demonstrações estas fornecidas, por exemplo, por: Beltrami (1835 -1900), Arthur Cayley (1821-1895), Feliz Klein(1849-1925) e, particularmente, por Henri Poincaré (1854-1912) que é o autor do modelo de Geometria Hiperbólica adotado neste

[3] Maiores detalhes consultar Eves (1995, p.541)

estudo.Tais demonstrações confirmaram a possibilidade de existência de outras geometrias além da euclidiana, confirmando que de fato o quinto postulado é um postulado. As novas geometrias ficaram conhecidas como Geometrias Não Euclidianas.

A EPISTEMOLOGIA BACHELARDIANA E A EDUCAÇÃO

Seguindo a trilha de Bachelard — em sua análise dos obstáculos que um novo conhecimento tem de vencer para se constituir — pretendemos justificar no campo da educação matemática como alguns obstáculos se manisfestam no processo de ensino e aprendizagem, no caso aqui da Geometria Hiperbólica.

Bachelard – como pensador e professor de ensino básico e superior – deixa transparecer em diferentes passagens de sua obra um olhar apurado para questões que perpassam o ensino e a aprendizagem, como exemplifica o trecho do texto de um de seus comentadores, reproduzido a seguir:

> Quando Léon Brunschvicg estranhou o fato de Bachalerd ter atribuído tanta importância ao aspecto pedagógico das noções científicas, este lhe respondeu que se considerava muito mais como professor do que como filósofo, pois achava que a melhor forma de avaliar suas próprias ideias era ensinando-as. (BARBOSA & BULCÃO, 2011, p. 59).

A dimensão de ensino e aprendizagem presente na obra bachelardiana já vem sendo percebida e trabalhada há algumas décadas por pesquisadores que atuam na área de educação científica e de educação matemática. Dentre eles encontramos, por exemplo, Lopes (1996) no ensino de química, Zanetic (1989) no ensino de física, e, Trindade (1996) que dedica uma atenção especial aos aspectos epistemológicos da obra de Bachelard aplicando-os à educação em matemática.

Respaldados por esses autores e nas leituras que Bulcão (2009) apresenta da obra de Bachelard, buscamos apontar aqui algumas reflexões e análises sobre o papel dos obstáculos epistemológicos de natureza verbal emergentes no contexto da educação, em especial na educação matemática.

Lemos nas palavras do próprio Bachelard que “[...] a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e também na prática da educação.” (Bachelard, 1996, p. 21). E ao cunhar essa noção de obstáculo epistemológico o próprio Bachelard salienta que,

> [...] é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 1996, p. 17).

Portanto, a noção bachelardiana de obstáculo epistemológico é uma chave importante para a análise das tensões e das rupturas que ocorrem no próprio tecido do conhecimento no decorrer de sua tecitura. Assim, vislumbrar a ação desses obstáculos em contextos de ensino e aprendizagem, parece-nos ser imprescindível para a compreensão dos processos de construção de conhecimentos, particularmente na formação inicial docente.

O OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO DE NATUREZA VERBAL

No âmbito do presente trabalho nossa atenção está focada em um obstáculo epistemológico – o obstáculo epistemológico de natureza verbal – caracterizado como o abuso na utilização de palavras associadas à imagens, ou, na explicação do próprio Bachelard (1996, p. 91) quando caracterizamos “[...] um caso em que uma única imagem, ou até uma única palavra, constitui toda a explicação”. Por conseguinte, as imagens, assim como as palavras, também atuam como causas de estagnação (e até mesmo de retrocessos) no processo de construção do conhecimento de um determinado conceito (LOPES, 1996).

Apresentamos a seguir um recorte dos resultados obtidos na pesquisa à qual este texto se remete e que indicam que a constituição de novos conhecimentos ligados aos conceitos de retas e retas paralelas, forjadas no domínio de uma Geometria Não Euclidiana, emergem no esforço de superação de um obstáculo epistemológico.

MATERIAL E MÉTODOS

A sala de aula representa o plano social onde os significados, aqui no caso as Geometrias não Euclidianas, são construídos pelo relacionamento entre todos os envolvidos. Conforme Esteban (2010) as práticas educacionais são mediadas por relações humanas, portanto nos processos de ensino e aprendizagem as dimensões sócio-culturais e das linguagens são determinantes na significação e resignificação dos conceitos formais e dos discursos em contextos de sala de aula no âmbito dos quais eles se constituem. É, portanto, numa análise desses discursos, que a metodologia é implementada por meio de um dispositivo analítico, a Análise de Discurso, conforme Orlandi (2015). Estas características tornam a pesquisa de natureza qualitativa.

Justificativa

A associação da palavra *reta* (euclidiana) ao traçado de uma *linha reta* não ocorre somente no imaginário de estudantes e professores(as) de geometria; ela já está ao alcance dos olhos nas imagens desenhadas, por exemplo, pelos limites das paredes retilíneas dos edifícios que povoam as paisagens urbanas; e na própria régua, nossa constante companheira nos bancos escolares e que muito frequentemente se (con)funde com a próprio traço que ela gera no desenho.

Contudo, a imagem e as relações atribuídas a esse termo utilizado na geometria já deixam transparecer o grande esforço empregado nas tentativas de apreender um objeto forjado tanto nos sentidos imediatos como também na razão, vemos este esforço em uma definição de (linha) reta que pode ser encontrada na versão de Irineu Bicudo dos *Elementos* de Euclides (2009, p.97), a “reta é a linha que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.”

Contexto

Os dados sobre os quais se constitui a nossa análise resultam das transcrições das aulas videogravadas, realizadas durante a aplicação de um minicurso sobre Geometrias Não Euclidianas, particularmente sobre a Geometria

Hiperbólica no Disco de Poincaré. O público alvo é composto de estudantes do último semestre de licenciatura em matemática de uma instituição de ensino superior situada na cidade de São Paulo. Participaram um total de 20 estudantes de licenciatura, oriundos de escolas públicas estaduais, na faixa etária entre 30 e 40 anos.

O minicurso foi organizado em 8 unidades temáticas, cada uma com duração de uma hora (SANTOS FILHO, 2016). Abaixo estão elencados os temas das unidades que nortearam as aulas do minicurso:

Quadro 1. Unidades temáticas do minicurso sobre Geometria Hiperbólica – Disco de Poincaré.

1. A dimensão histórico-epistemológica relacionada à evolução da Geometria Euclidiana até as Geometrias Não Euclidianas.
2. Bases teóricas da Geometria Euclidiana.
3. A Métrica do Disco de Poincaré.
4. Postulados, discussão e construção associados ao conceito de reta e de segmento de reta hiperbólicos à luz do Disco de Poincaré.
5. Construção de triângulos hiperbólicos no Disco de Poincaré.
6. Medida de ângulos no Disco de Poincaré.
7. Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico no Disco de Poincaré.
8. A multiplicidade das paralelas na Geometria Hiperbólica.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os dados a partir dos quais foi construído o *corpus* (ORLANDI, 2015) que constitui o objeto de análise apresentada no âmbito deste trabalho resulta de excertos das transcrições da aula referente à quarta unidade temática.

Sobre esse conjunto de dados foi realizada uma *análise de discurso* (ORLANDI, 2015) contemplando as seguintes etapas: transformação dos dados brutos em dados de análise (*corpus);* seleção e transcrição dos episódios nos quais observou-se formações discursivas com indícios da presença de obstáculos epistemológicos de natureza verbal.

Conteúdos

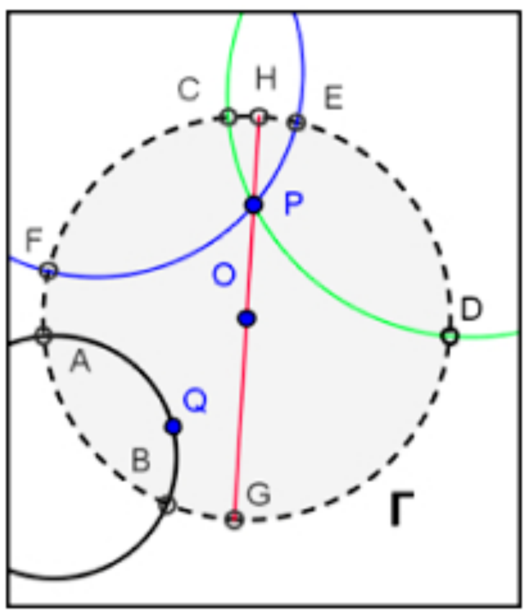
Para dar suporte a discussão da análise dos resultados obtidos, apresentamos antes os princípios básicos trabalhados nas aulas do minicurso para definir o Modelo do Disco de Poincaré, vide quadro 02 e figura 01:

Quadro 2. Geometria Hiperbólica – Apresentação inicial do Disco de Poincaré[4]

A. Ocorre no plano.
B. Se desenvolve no *interior* da circunferência *Γ* (o perímetro de *Γ* não pertence ao modelo).
C. É construído a partir de elementos e conceitos da própria geometria plana de Euclides: circunferência *Γ;* arcos[5] de circunferência ortogonal à *Γ*, FE, DC, AB; diâmetro HG; pontos A, B, C, D, E, F, G, H, (estes pontos *não* pertencem ao modelo); pontos O,P e Q interiores a *Γ* pertencem ao modelo.
D. É construído por meio de uma métrica diferente da euclidiana, pode ser representado como uma região limitada do espaço euclidiano (interior da circunferência *Γ).*
E. Permite duas imagens distintas para representar uma *reta*: uma na forma de um diâmetro (HG), mais próxima da imagem de uma reta euclidiana; e outra na forma de um arco de circunferência ortogonal à *Γ*, mais distante da imagem de uma reta euclidiana (arcos AB, CD e EF).
F. Admite a multiplicidade das paralelas, exemplo: por um ponto P, na figura 1, passam duas retas hiperbólicas CD e EF que são paralelas à reta hiperbólica AB.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 1. Representação das retas hiperbólicas no do Disco de Poincaré



Fonte: elaborado pelos autores.

[4] Para maiores detalhes consultar Andrade (2013)
[5] Os termos geométricos serão apresentados pelo seu nome seguido dos pontos que o determinam, exemplos: diâmetro HG, arco FE.

Nesta nova geometria, em consonância com Andrade (ANDRADE, 2013) os termos *ponto*, *reta* e *plano* também são apresentados sem serem definidos.

As propriedades do modelo do Disco de Poincaré elencadas anteriormente foram abordadas com destaque nas aulas porque têm grande potencial para: produzir a tensão entre conhecimentos da Geometria Euclidiana e da Geometria Hiperbólica; fazer emergir obstáculos epistemológicos; proporcionar reestruturações do conhecimento que levem a superação dos obstáculos epistemológicos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

À exemplo de dois episódios discursivos (reproduzidos a seguir), dentro dos vários existentes e ocorridos durante a aplicação do minicurso, buscamos ilustrar como se manifestam os obstáculos epistemológicos de natureza verbal emergentes no contato inicial e na construção dos conhecimentos, por parte dos licenciandos, em relação à geometria hiperbólica, particularmente no que diz respeito às construções geométricas e conceitos ligados as retas e retas paralelas na geometria hiperbólica do Disco de Poincaré.

Episódio 1

Neste episódio, referente à unidade temática quatro (quadro 01, p.8), a análise recai sobre o postulado das paralelas no contexto da Geometria Hiperbólica, quando os estudantes se deparam pela primeira vez com uma aparente contradição entre o novo postulado das paralelas na Geometria Hiperbólica e o mesmo postulado no contexto da Geometria Euclidiana. As duas formulações foram apresentadas aos estudantes da seguinte forma:

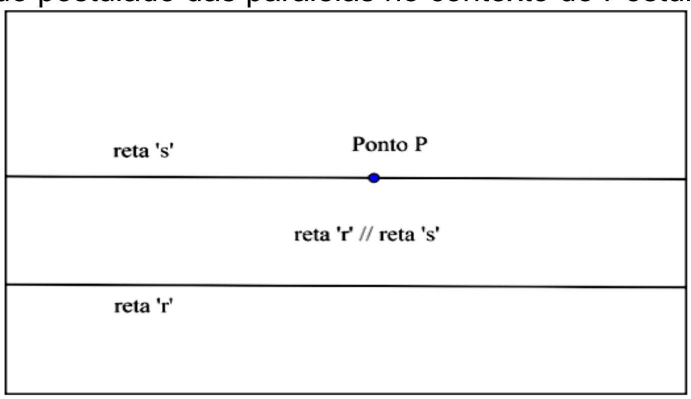
- Geometria Euclidiana: “Dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não intersecta r.” (EVES, 1995, p. 539).

- Geometria Hiperbólica: “Por um ponto P fora de uma reta r *passa mais de uma reta paralela* à reta r.” (COUTINHO, 2001, p.40).

Nesse contexto, por iniciativa própria, o licenciando (L1) vai ao quadro e, em diálogo com a classe e com o professor (P), busca expressar nas formas verbal e como imagem as (novas) retas paralelas anunciadas pelo postulado das paralelas na Geometria Hiperbólica.

Observemos a seguir uma reprodução da imagem apresentada pelo licenciando (*figura 2*), juntamente com a explicação fornecida por ele (quadro 03):

Figura 2. Reprodução da imagem apresentada pelo licenciando: representação do postulado das paralelas no contexto do Postulado Hiperbólico



Fonte: Elaborado pelos autores.

Quadro 3. Trechos dos discursos do licenciando L1 referentes ao episódio 1

Interlocutor	**Discurso**
L1	- Inimaginável! (aluno explicando e desenhando na lousa)
P	- Continua M...
L1	- Se eu fizer..., qualquer outra reta que passe neste ponto aqui *(ponto P),* tem que ser...., vamos lá, fora dessa..., fora desta reta aqui *(reta s),* qual que vai ser paralela *(a reta r)* aqui, só aqui né, só esta daqui assim né *(reta s),* passa aqui, paralela, juntinho, e ai, se você por um pouquinho mais pra cima vai ficar paralela, mas tá fora do ponto (P), para cá (abaixo) tá fora do ponto, é, o único ponto, ai a gente fica ..., eu não consigo imaginar, é a única, é uma só *(reta s),* eu não consigo imaginar.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse episódio encontramos indícios de como a palavra materializada em imagem age como um obstáculo epistemológico (de natureza verbal), pois a reta (em sua acepção euclidiana) é (con)fundida com a própria imagem que ela busca descrever, tamanha a força da "[...] ênfase sintomática do poder do olhar" (BACHELARD,1996, p. 35).

Daí um exemplo de um dos obstáculos anunciados por Bachelard, pois a imagem que confere a palavra reta um *status* de verdade é também a mesma imagem que retarda o progresso de seu conhecimento para além da Geometria Euclidiana. A reta euclidiana ganha assim uma materialidade que (con)funde-se com a imagem, transformando-se, portanto, na própria imagem, que está mais acessível ao alcance dos olhos do que das propriedades e relações com outros elementos no corpo da geometria em que ela se insere.

Para o licenciando que teve uma formação na qual a "[...] matemática [é] apresentada sempre como uma série crescente de verdades imutáveis e eternas." (LAKATOS, 1978, p.186, apud TRINDADE, 2013, p. 16), a ruptura *com* e *a negação de* um conhecimento anterior pode não ocorrer ou, pior, pode ocorrer só em aparência, quando o estudante reproduz o que o professor(a) espera que ele forneça como resposta, esforçando-se para ocultar de si mesmo — em vez de expressar — as dificuldades com o novo, que caracterizam as marcas dos obstáculos epistemológicos com os quais se depara.

Episódio 2

Observamos, agora, que ao tomar consciência do obstáculo, num segundo episódio, referente ao final da quarta unidade temática (quadro 01, p.8), a ruptura com o conhecimento anterior, que entrava a construção de um novo conhecimento, mostra sinais de que pode sim ocorrer, ainda que lentamente.

O excerto transcrito a seguir ilustra um diálogo entre os licenciandos *L1, L2, L3, L4 e L5*. Nesse diálogo encontramos indícios que sugerem que uma ruptura com a imagem de reta euclidiana começa a ocorrer.

Quadro 4. Trechos dos discursos referentes ao episódio 2

Interlocutor	Discurso
L2	- Segmento de reta tem que ser reta (imagem euclidiana), é isso que está na cabeça da gente.
L1	- Estamos habituados a reta (euclidiana) e demora para visualizar que o diâmetro e o arco de circunferência ortogonal, também é uma reta. Demora para dar... essa assimilada.
L3	- Porque não é mais uma reta...
L4	- É que na nossa cabeça só tem reta, não tem este negócio de arcos...
L5	- Engolir que este arco é uma reta, eu acho que esta é a dificuldade. Conseguir administrar isso. Administrar que este arco é uma reta.
L1	- São arcos né, são curvas, então a gente esta ainda preso a geometria euclidiana, quando fala de linear, reta linear, pontos lineares.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Percebemos aqui, no contexto da Geometria Hiperbólica, que a cisão da palavra com a imagem, antes legitimada e comprovada pela ênfase sintomática do poder do olhar, é colocada à prova.

Assim, a tensão que se instaura entre a palavra e a imagem, que escapa aos olhos, é também o emergir de um obstáculo que tensiona o tecido de um conhecimento anterior: o preço que se paga por aceitar o *postulado das paralelas* (agora no universo da Geometria Hiperbólica) é alto, pois se antes a dificuldade era vislumbrar a imagem das diferentes retas (hiperbólicas) que, passando por um ponto comum, são paralelas a outra reta dada, agora o problema é reconhecer nessas imagens (arcos de circunferências ortogonais), dissonantes da reta euclidiana, os atributos de uma reta. No universo da nova geometria a palavra *reta* precisa ser compreendida mais como propriedades e relações, no interior de um modelo geométrico, e menos como imagem que constitui toda a explicação (BACHELARD, 1996). Contudo a palavra *reta*, que permanece, carregará sempre o peso de sua imagem, herdada da geometria de Euclides e consolidada historicamente; por isso, possivelmente, o incômodo percebido na fala de *L1: Estamos habituados a reta…* Um hábito que foi sendo moldado pelo senso comum, pela cultura escolar e que atua como uma memória esquecida (ORLANDI, 2015).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

À luz dos episódios 1 e 2 discutidos na seção anterior, buscamos mostrar como se manifestam os obstáculos epistemológicos de natureza verbal, emergentes na construção de novos conhecimentos por licenciandos em matemática, no âmbito da Geometria Hiperbólica. Vimos que representações associadas à “reta” também são causas de inércias e retrocessos no ensino e na aprendizagem de novas geometrias.

Os significados associados à palavra e à imagem da reta são construídos historicamente e, também, epistemologicamente nos processos de significação atribuídos a eles no interior de um determinado corpo de conhecimento. Seus significados pertencem assim, também, à formação discursiva (ORLANDI, 2015) dos licenciandos em matemática.

Refletir sobre o papel dos obstáculos epistemológicos torna-se uma contribuição importante para o reconhecimento e, consequentemente, para uma busca consciente de superação desses obstáculos tanto do ponto de vista de quem aprende como de quem ensina.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. (2002). **Episódios Da História Antiga da Matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira e Carvalho. Rio de Janeiro: SBM.

ANDRADE, P. (2013). **Introdução a geometria hiperbólica: o modelo de Poincaré***.* Rio de Janeiro: SBM.

BACHELARD, G. (1978). **A filosofia do não. In: Os pensadores**. Traduções de Joaquim José Moura Ramos, et al. São Paulo: Abril Cultural, p. 1-87.

BACHELARD, G. (1978). **O novo espírito científico. In: Os pensadores**. Traduções de Joaquim José Moura Ramos, Remberto Francisco Kuhnen, Antonio da Costa Leal, Lídia do Vale Santos Leal. São Paulo: Abril Cultural, p. 89-179.

BACHELARD, G. (1996). **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto.

BARBOSA, E., & BULCÃO, M. (2011). **Bachelard: pedagogia da razão, pedagogia da imaginação**. Petrópolis, RJ: Vozes.

BONOLA, R. (1955). **Non-Euclidean Geometry**. New York: Dover.

BOYER, C. B. (1974). **História da Matemática**. São Paulo: Blucher.

BULCÃO, M. (2009). **O racionalismo da ciência contemporânea: introdução ao pensamento de Gaston Bachelard**. Aparecida, SP: Ideias e Letras.

COUTINHO, L. (2001). **Convite às Geometrias não Euclidianas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

DOLCE, O., & POMPEO, J. N. (2011**). Geometria Plana. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 9. 7ª edição. Editora Atual. São Paulo.

ESTEBAN M.P.S. (2010). **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. São Paulo: Mc GrawHill.

EUCLIDES. (2009). **Os Elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo**. São Paulo: Editora UNESP.

EVES H. (1995). **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp.

LOPES, A. R. C. (1996). **Bachelard: O Filósofo Da Desilusão**. Caderno Catarinense de Ensino de Física, Florianópolis, v. 13, n. 3, p. 178-276.Orlandi, E. P. (2015). *Análise de Discurso: Princípios e Procedimentos*. Campinas, SP: Pontes.

SANTOS FILHO, L.C. (2016). **Geometrias Não Euclidiana: obstáculos epistemológicos na formação de licenciandos em matemática**. 165 f. (Dissertação de Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática), Universidade Federal do ABC, Santo André.

TRINDADE, J.A.O. (1996). **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. 181 f. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

ZANETIC, J. (1989). **Física também é cultura** (Tese de doutorado), Faculdade de Educação da USP, São Paulo.